COSTRUIRE IL SENSO DEL NUMERO

SARA CAMPANA
CORSO CIDI CAPANNOLI
15 GENNAIO 2025

L'APPROCCIO AL NUMERO Cosa è per te un numero?

I «SENSI» DEL NUMERO

- cardinale, collegato alle situazioni di valutazione della numerosità di insiemi;
- **ordinale**, collegato alle situazioni in cui i numeri servono per "mettere in ordine" eventi, situazioni spaziali, ecc (numero civico, numero del binario, la posizione nella fila...);
- numero come **etichetta** (pulsante del telecomando, sulle monete e sulle banconote, sui pulsanti dell'ascensore...). Ha a che fare con la competenza notazionale (capacità di elaborare forme di scrittura ortografiche);
- misura (il risultato di una misura è un numero dimensionato, cioè accompagnato dall'indicazione dall'unità di misura utilizzata); è collegato a situazioni in cui il numero serve per riferire la grandezza di un oggetto collegata alla grandezza di un

- oggetto-campione
- **relazionale** e di **valore**: dominio numerico che riguarda l'adeguata percezione del valore di un numero in relazione ad altri numeri (stima, frazioni etc...); ad esempio «una cosa di un tipo vale cinque di un'altra».

È il contesto che definisce l'uso di un significato invece di un altro e scoprire che cosa c'è in comune tra un numero etichetta e un numero misura fa parte del percorso di concettualizzazione del numero. Quando i bambini dicono: ho il 25 di scarpe, ho messo 25 palline nella collana, per andare dalla classe al bagno ho fatto 25 passi... il numero è sempre lo stesso ma dietro ognuno di quei numeri ci sono 'azioni' diverse, ragionamenti e procedure diverse.

Se un'attività non acquista senso, i bambini non attivano le loro capacità di ragionamento e soprattutto non mettono in campo le loro conoscenze che si sviluppano gradualmente dalle prime esperienze di conteggio e di numerazione proposte nella scuola dell'infanzia. Ciò che cambia, ai vari livelli, è, ovviamente, il livello di concettualizzazione raggiungibile: c'è differenza tra fare esperienza e prendere coscienza, ad esempio, del fatto che il numero 25 detto per un numero di scarpe è lo stesso numero 25 che si usa per numerare le perline di una collana; ma per trovare il punto di contatto bisogna uscire dai contesti in cui si è fatta un'esperienza e varcare una soglia, quella che separa il mondo reale, fatto di oggetti reali e di azioni concrete, dal mondo della matematica, fatto solo di oggetti mentali e di correlazioni logiche tra queste entità.

Criticità di lavorare solo sulla cardinalità

Ci sono possibili ostacoli e difficoltà che la dominanza dell'aspetto "cardinale" nell'insegnamento del numero naturale può generare per quanto riguarda:

- l'approccio ad altri aspetti del numero
- l'estensione del concetto di numero (dai naturali, ai decimali e alle frazioni)

L'esperienza di altri Paesi e gli studi comparativi con i risultati di apprendimento precedenti l'approccio insiemistico al numero hanno evidenziato maggiori difficoltà per quanto riguarda la padronanza dei numeri decimali, la scrittura dei numeri in cifre, l'approccio alle frazioni, l'uso del numero in situazioni di misurazione. Ciò è comprensibile in quanto la dominanza dell'aspetto "cardinale" genera rigidità nel legame tra numero e quantità di oggetti; essa va a scapito (ad esempio) della padronanza della scomposizione dell'unità in parti (necessaria nei processi di misurazione) e delle equivalenze (in particolare per le misure di lunghezza), che richiedono di passare da unità di un certo valore ad unità di un altro valore.

Nonostante gli effetti negativi dell'approccio unilaterale al numero attraverso il "senso" cardinale, che hanno indotto gli estensori dei programmi (italiani del 1985, francesi, olanesi, ecc.) a dare importanza anche agli altri "sensi", moltissimi insegnanti (e la maggior parte dei libri di testo) continuano a privilegiare l'insiemistica e il senso "cardinale" del numero. Perchè?

Discutere le seguenti, possibili motivazioni:

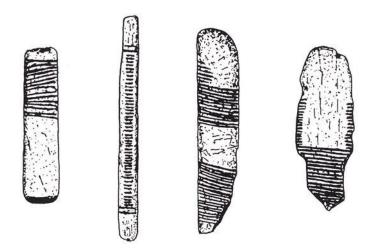
- per la teoria di Piaget (che dà una grande importanza al "senso" cardinale del numero)
- per inerzia (in particolare, delle case editrici dei libri di testo)
- perché il senso cardinale del numero si può costruire in modo progressivo (partendo da 1, 2, 3 ...), con materiali facilmente reperibili o schede, e si possono realizzare
- verifiche facilmente gestibili con schede per accertarne la padronanza da parte dei bambini
- perché consente di arrivare rapidamente all'addizione e alla sottrazione, e poi in seguito alla moltiplicazione dei numeri naturali, attraverso le rappresentazioni insiemistiche di tali operazioni



QUALCHE PREMESSA

Il contare è un'attività che oggi appare del tutto istintiva, ma vi fu un tempo in cui l'essere umano non sapeva contare, almeno per il significato che oggi assume questa attività, né immaginava che si potesse fare o che avesse senso farlo. È stata una lenta conquista dell'essere umano acquisire il concetto di numero astratto, e in particolare di conteggio di una raccolta di elementi: la stessa conquista che vive un bambino che impara ad associare a una raccolta il numero dei suoi elementi, ossia la sua cardinalità.

Fu proprio grazie alla corrispondenza biunivoca che l'uomo preistorico, nel corso di millenni, riuscì a costruire e poi utilizzare l'aritmetica per sopperire ad esigenze pratiche di contabilità, classificazione e distribuzione, ben prima di giungere all'idea di numero astratto.



INIZIAMO DA QUI

PREMESSE METODOLOGICHE

Si possono fissare alcune premesse fondanti una metodologia della didattica della matematica:

- il bambino deve poter fare **esperienze matematiche** in situazioni didattiche organizzate per l'apprendimento
- il bambino deve poter costruire la competenza linguistica necessaria ad esplicitare in modo compiuto il proprio pensiero
- il processo di assunzione consapevole dei linguaggi formalizzati della matematica è lungo e complesso e richiede la mediazione dell'insegnante.

La competenza matematica non può prescindere, sotto l'aspetto del suo uso consapevole, dalla competenza linguistica, intesa come possibilità di esprimere, mediante le parole, le relazioni logiche fondamentali (causali, temporali, ipotetiche, progettuali). Lo sviluppo della padronanza linguistica è dunque indispensabile anche per l'apprendimento della matematica. In particolare il linguaggio verbale consente al bambino di esplorare le soluzioni possibili, di poter formulare ipotesi, di articolare i passaggi del ragionamento, di dar significato alle proprie scelte, e anche di assumere consapevolezza del processo risolutivo attraverso la ricostruzione della strategia seguita.

- Far parlare i bambini e le bambine
- Ascoltare (davvero) quello che i bambini dicono e non quello che vorremmo dicessero
- Iniziare a farli confrontare da loro, partendo dalle loro esperienze
- Fondamentale è la gestione dell'errore: all'infanzia non si deve mai far sentire il bambino inefficace rispetto a ciò che sta facendo (non dire «hai sbagliato» ma semmai «riproviamo insieme? Proviamo a controllare? Vediamo come fare?). Alla primaria l'errore dà informazioni sostanziali sui processi di apprendimento del bambino: vanno indagati non semplicemente corretti.

LA SUCCESSIONE NUMERICA: L'ENUMERAZIONE CONTARE PER CONTARE

Riguarda l'aspetto intransitivo e linguistico del contare: recitare una sequenza di numeri che coincide con quella convenzionale, è il presupposto su cui si basa la capacità di contare oggetti che, a sua volta, stimola la padronanza della sequenza delle prime parole numero e la scoperta della regola ricorsiva di generazione delle parole che indicano i numeri più grandi (venti-due, venti-tre, venti-quattro ...)

La memorizzazione della sequenza rende piano piano la recita automatica e consente di spostare l'attenzione sulla procedura più complessa di contare oggetti.

L'approccio ricorsivo ai numeri è quello che suggerisce l'idea di infinito. Il dominio della regola di produzione linguistica delle parole numero, presto o tardi, induce la consapevolezza che non esiste un limite.

- Filastrocche con i numeri
- Conteggio per «vedere a chi tocca»

- Contare ritmicamente oggetti facendo attenzione alla corrispondenza parola-gesto-oggetto
- Contare oltre il 20

CONTARE

LA FUNZIONE DEI GESTI QUANDO SI IMPARA A CONTARE

Principi del conteggio

- Principio di iniettività (Bartolini Bussi): APPAIARE GLI OGGETTI IN UNO SCHIERAMENTO CON SEGNI DISTINTI (numeri). Questo prevede la ripartizione (dividere tra oggetti che devono essere contati e quelli già contati) e l'etichettamento (assegnare l'etichetta numerica ad un solo oggetto mentre lo si ripartisce: CORRISPONDENZA UNO A UNO). È necessario aver imparato il nome dei numeri e il loro ordine.
- **Principi dell'ordinalità** (le etichette devono essere scelte in un *ordine stabile*, conoscere ciò che viene prima e ciò che viene dopo) e della cardinalità (l'etichetta finale dà il nome a tutta la collezione)

QUINDI SONO MOLTE LE INFORMAZIONI CHE IL BAMBINO DEVE UTILIZZARE MENTRE CONTA

Errori più frequenti:

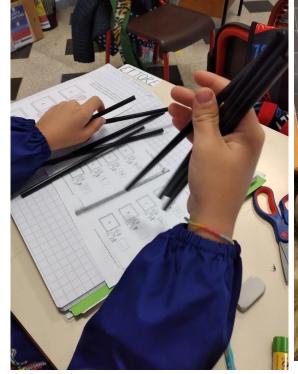
- errori di ripartizione tra l'insieme contato e da contare (salto o ripetizione)
- errori nella coordinazione (continuare a contare anche dopo oppure fermarsi prima)
- errori di sequenza (non rispetto dell'ordine stabile)
- errori di distrazione

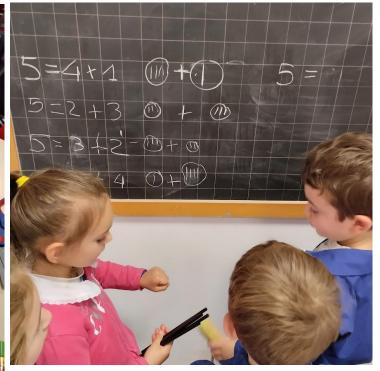


Diversi studi dimostrano che quando il bambino utilizza il gesto nel contare (toccare/spostare/segnare/ gli oggetti della collezione) diminuiscono sensibilmente gli errori rispetto a queste situazioni:

- Se un altro compie i gesti al posto suo
- Se il bambino indica gli oggetti
- Se un altro indica gli oggetti al posto suo
- Nessun gesto

SPOSTARE/SEGNARE/TOCCARE...) FORNISCE UN SUPPORTO ESTERNO PER RAPPRESENTARE ALCUNI CONTENUTI DELLA MEMORIA DI LAVORO, LIBERANDO COSÌ RISORSE PER I **COMPITI PIÙ COMPLESSI**. LA MAGGIOR ACCURATEZZA DEI RISULTATI DEL CONTEGGIO METTE IL BAMBINO NELLA CONDIZIONE DI ACCORGERSI CHE IL **CONTENGGIO RIPETUTO** DI UNA STESSA COLLEZIONE PORTA SEMPRE ALLO STESSO RISULTATO, FAVORENDO QUINDI LA COMPRENSIONE DELLA CONSERVAZIONE DEL **NUMERO**» (Bartolini Bussi)





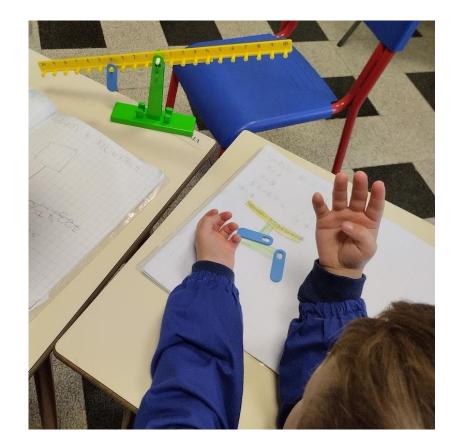
LA COSTRUZIONE DEL SENSO DEL NUMERO: L'USO DELLE MANI

Alcuni risultati ottenuti nel campo delle neuroscienze hanno messo in luce un legame neuro-funzionale tra l'uso delle dita e lo sviluppo del senso del numero.

Le rappresentazioni numeriche sono fondate su tre abilità di base:

- la capacità innata di rappresentare piccole numerosità (o subitizing)
- l'abilità motoria fine (o finger tapping)
- l'abilità di rappresentarsi mentalmente le dita (gnosia digitale).

(Baccaglini Frank)



LA COSTRUZIONE DEL SENSO DEL NUMERO: L'USO DELLE MANI

Poiché le dita sono sempre a portata "di mano", i bambini si trovano spesso ad usarle non solo per rappresentare numerosità, ma anche per contare e fare aritmetica. Le dita, dunque, fungono da nel ponte legare rappresentazioni concrete a <u>rappresentazioni</u> astratte delle nozioni di "quantità" e delle "operazioni" (almeno di addizione e sottrazione).





Calcolare con le dita: alcune accortezze

Nonostante il fatto che "contare sulle dita" abbia spesso (purtroppo) una bruttareputazione in classe, diversi studi mostrano che contare sulle dita può favorire losviluppo di abilità numeriche (Brissiaud, 1992; Andres, Seron, & Olivier 2007; Sato et al.2007; Thompson et al. 2004).

Uso scorretto o parziale di tale strategia può indurre errori. Per esempio, i bambini possono rimanere legati a un etichettamento rigido delle dita: secondo il principio della corrispondenza uno-a-uno ogni dito viene messo in relazione con uno e un solo numerale, ma diventa difficile stabilire, per esempio, il risultato di "10-1" se viene abbassato il "dito-6". In questo caso, infatti, sarebbe necessario riassegnare alle dita che prima erano "dito-7", "dito-8", "dito9" e "dito-10", le nuove etichette "6", "7", "8", "9". Questa procedura può creare confusione in alcuni bambini. Sarebbe auspicabile esporre precocemente i bambini all'uso delle dita nel conteggio senza assegnare etichette-numero alle dita, in quanto potenziare strategie di calcolo con le dita può portare a benefici nella costruzione del significato di numero naturale. Paradossalmente l'uso delle dita può favorire un allontanamento da strategie che richiedono molte risorse cognitive (e dunque sono lente) basate sul puro conteggio, per passare a "strategie digitali" più efficienti ed efficaci.

È importante che il bambino alzi (o abbassi) le dita simultaneamente quando le usa per rappresentare quantità, affinché si potenzino le strategie di calcolo descritte sopra. Infatti, se le dita vengono alzate (o abbassate) una alla volta è probabile che il bambino utilizzi strategie di tipo "counting on" quando si trova davanti a un'addizione o a una sottrazione.

Attività laboratoriale con il conta dita:

https://www.ivana.it/site/index.php/software-progetto-percontare?view=article&id=46:indovinelli-con-le-dita&catid=50

Provate a progettare attività in cui si sviluppi la motricità fine e la consapevolezza dell'utilizzo delle singole dita della mano (riconoscimento delle dita, singolarizzazione delle dita, controllo simultaneo)

Provate a strutturare delle attività da proporre alla scuola dell'infanzia e in classe prima seconda utilizzando le dita e il conta dita. Per la primaria, provate a pensare a quali significati matematici potete costruire con questo artefatto.

- Fin dall'inizio è bene favorire l'uso delle dita e consentirne l'uso fino a che i bambini non lo abbandonano da soli;
- È bene usare le dita perché possono facilitare la concezione di addizione e sottrazione come operazioni complementari;
- Alzare e abbassare le dita in maniera sequenziale oppure simultanea può influenzare i processi cognitivi coinvolti e comunque è indicativo rispetto a questi;
- No all'uso di un etichettamento rigido delle dita;
- È bene usare le dita per la loro struttura naturale di 10 in tutto e 5 per mano.
- Lavorare sul calcolo a mente e chiedere ai bambini di aiutarsi con le dita (e poi di immaginarsele).

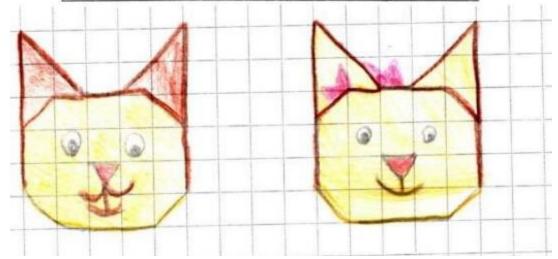
La consegna di sollevare 8
dita a partire dalle mani con
dita abbassate in un caso, o
quella di partire dalle mani con
dita alzate (e quindi
abbassarne 2) cambia molto i
possibili processi cogniti vi
coinvolti»

Anna Baccaglini Frank

La maestra mette le mani dietro la schiena e dice: «Ho tre dita alzate, quante **non** sono alzate? Rappresenta la situazione sul contamani (poi la maestra fa vedere le sue mani)

USA LE TUE MANI E IL CONTAMANI PER FARE I SEGUENTI CALCOLI

7 + 4 =	11 + 6 = 47		
13 + 5 = 18	15 - 3 = 2		
10 + 10 = 2	10 + 8 = 18		
10 + 5 = 5	12 - 5 = 7		
5 + 12 = 17	11 + 9 = 20		
11 - 1 =	20 - 5 = 15		

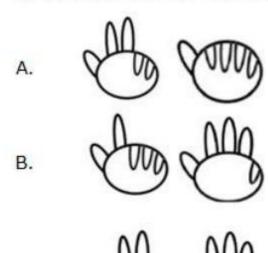


DITA ALZATE E DITA ABBASSATE

LEGGI CON ATTENZIONE

MANO SINISTRA	MANO DESTRA	
3 DITA	1 DITO	
ALZATE	ABBASSATO	

QUAL È IL DISEGNO GIUSTO?



c. 200

SPIEGA IL PERCHÉ DELLA TUA RISPOSTA

		DISEGNA LE DITA DELLE MANI MERO CORRISPONDENTE	
DITA MANO SINISTRA	DITA MANO DESTRA	DISEGNO	NUMERO
3 ALZATE	1 ABBASSATO	As as	7
4 ALZATE	3 ALZATE	<u>a</u>	7
5 ABBASSATE	2 ABBASSATE		3
2 ALZATE	3 ALZATE	8 8	5
5 ALZATE	4 ABBASSATE	800	6
3 ALZATE	3 ABBASSATE	8 80 m	5
5 ALZATE	2 ALZATE	2000 0000	7

L'ELABORAZIONE DEL NUMERO E LA QUANTIFICAZIONE

L'elaborazione del numero può essere associata a operazioni di quantificazione, cioè a operazioni cognitive mediate dall'attivazione di una rappresentazione mentale della quantità numerica di tipo analogico, non verbale. I processi di quantificazione non si basano su abilità di conteggio vero e proprio, ma dipendono da altre abilità specifiche: il subitizing e la stima.

Subitizing

Si tratta di riconoscere "a colpo d'occhio" la quantità presente in un insieme di n elementi, senza ricorrere a veri e propri meccanismi di conteggio verbale. Il subitizing è efficiente solo nei casi di piccole numerosità (4-6 elementi nei soggetti adulti); fino a questo numero di elementi l'essere umano riesce a colpo d'occhio a dire quanti elementi ci sono in una raccolta, senza il bisogno di contarli a uno a uno (basta provare con gli insiemi di oggetti rappresentati nella seguente figura

COSTRUIRE IL SENSO DEL NUMERO SARA CAMPANA CORSO CIDI CAPANNOLI ATTIVITÀ PER L'ASPETTO LINGUISTICO

- Che cosa sono i numeri?
- Dove ne vedete?
- A che cosa servono?
- Chi li usa?
- Come si usano?
- Sapete contare?
- Fino a quanto sapete contare?
- Fino a quanto sanno contare le persone che conoscete?
- Quanti sono i numeri?

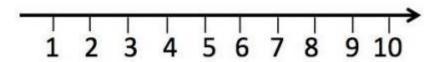
Come funzionano i numeri? LA LINEA DEI NUMERI

Il modello mentale della linea dei numeri costituisce al tempo stesso una forma più astratta di rappresentazione rispetto al conteggio degli oggetti, in quanto avvia la possibilità di contare qualsiasi elemento, introducendo in qualche misura un principio di astrazione, uno dei principi universali del numero richiamati da Gelman e Gallistel (1978). Un'appropriata esposizione porta ad una migliore rappresentazione e conseguente elaborazione numerica. Infatti, per esempio, nello sviluppo normale, la rappresentazione iniziale elaborata dal bambino della linea dei numeri sembra essere di tipo logaritmico, con i numeri più "piccoli" più distanziati e quelli "grandi" sempre più vicini. Questa rappresentazione, con gli anni di esposizione scolastica, si evolve verso quella "matematica" in cui i numeri sono disposti in maniera lineare. Per questo riteniamo fondamentale, per un buon sviluppo dell'elaborazione numerica, che la didattica scolastica proponga un'esposizione appropriata a rappresentazioni della linea dei numeri. Una buona rappresentazione mentale della linea dei numeri consente un accesso rapido ed efficace alle informazioni numeriche necessarie per moltissimi compiti sia numerici che aritmetici. Alcune ricerche (Dehaene, 2001; Okamoto e Case, 1996; Verguts e Fias, 2004;) suggeriscono che l'uso della linea numerica visiva, come rappresentazione esterna di supporto, favorisce la manipolazione di quantità e l'acquisizione e costruzione di concetti e procedure matematiche di alto livello. La linea dei numeri può, per esempio, facilitare il compito di identificare quale numero segue o precede un altro e in generale di identificare relazioni ordinali tra i numeri. Risulta pertanto utile fornire ai bambini esperienze concrete con la linea dei numeri al fine di favorire l'acquisizione e implementazione delle competenze numeriche e aritmetiche di base (Siegler e Ramani, 2009).

Come funzionano i numeri?

LA LINEA DEI NUMERI

Rispetto all'introduzione dello zero, questo significa che le attività eviteranno inutili appesantimenti cognitivi che possono sfociare in errori nei bambini più in difficoltà, ma non trascureranno la delicata questione dello zero: affronteranno, in maniera graduale, la sua introduzione come segno ("0") con un particolare significato prima come semplice segnaposto nella addizione e sottrazione (anche informali) sulla linea dei numeri, e poi come quantità nulla o "non- considerazione di oggetti che prima erano stati considerati" (p.e., "nessun dito alzato", o "nessun oggetto rimasto") (Anna Baccaglini Frank)

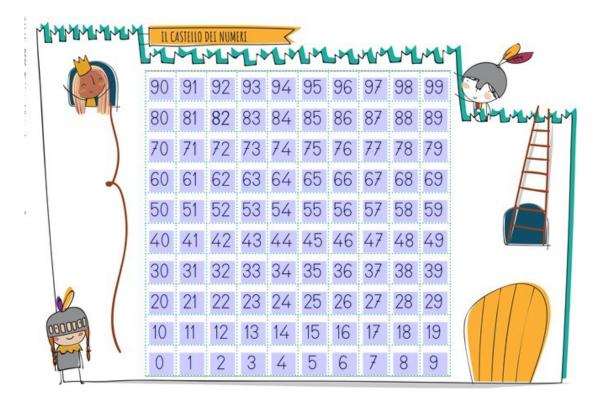


Il fatto che la linea prosegua (fino a poco prima di dove starebbe la tacca dello zero) alla sinistra della tacca "1" e a destra del "10" suggerisce (ma non occorre esplicitare questa riflessione se i bambini non la notano) che ci possano essere altri numeri. Inoltre, è possibile esplicitare con più facilità analogie con il righello o con il metro, quando eventualmente si affronteranno questi temi.

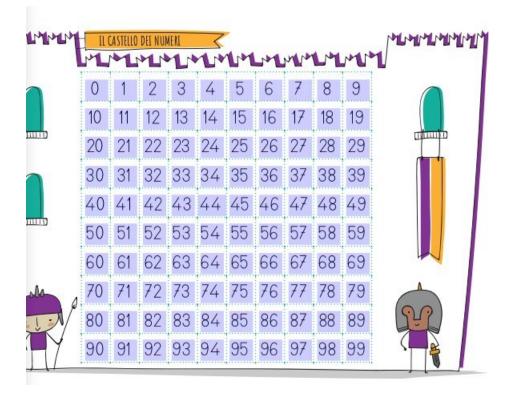
Come funzionano i numeri? LA LINEA DEI NUMERI

- Posiziona il numero... sulla linea
- Colora la parte della linea con i numeri maggiori di... (o minori di..., o compresi tra... e ...) Con una Linea dei numeri con finestra scorrevole:
- Se la finestra è sul...qual è il precedente e quale il successivo?
- Se ho nella finestra il numero ... (cioè se parto dal numero ...) dove arrivo se sposto la finestra in avanti/indietro di ...?
- Sei su un numero e vedi il numero ... proprio davanti a te, su che numero sei? Giochi con il software:
- Gino è sul numero successivo a quello di Betta che è sul Su quali numeri sono i coniglietti?
- Betta e Gino sono a distanza di ... numeri. Gino, che è sul ..., è sul numero maggiore. Dove sono i coniglietti?
- Betta è tra Gino e Osvaldo che sono sui numeri ... e Osvaldo è sul numero minore. Dove sono i coniglietti?

Come funzionano i numeri? La tabella del 100

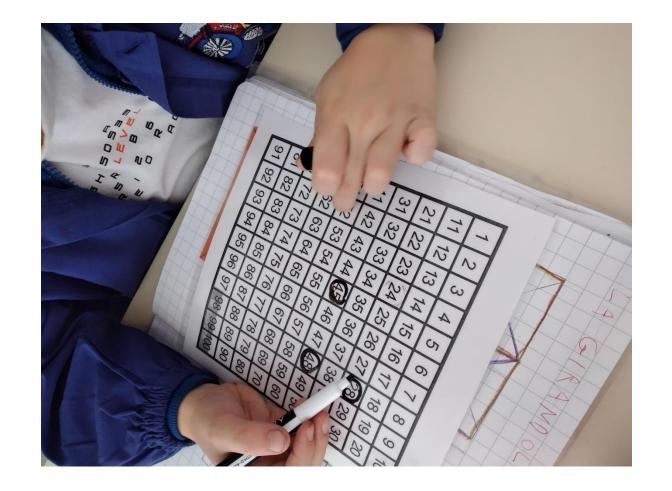


La sintassi dei numeri



Come funzionano i numeri?

La tabella del 100 (presentazione attività)



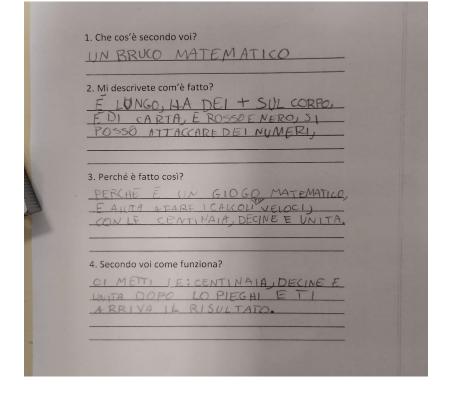
LA SINTASSI NUMERICA

Come funzionano i numeri?

IL VALORE POSIZIONALE DELLE CIFRE

Si vuole aiutare l'apprendimento della notazione decimale e l'interpretazione dei numeri in formato simbolico (detti a voce o scritti con caratteri arabi) attraverso una semantica mediata dall'oggetto concreto fascetto-decina. In particolare, qui rafforziamo la rappresentazione dei numeri come insiemi di fascetti-decina (decine) e cannucce sparse (unità), e cioè la semantica del nostro sistema decimale. Con le consegne della seconda fase, si potenziano le abilità di traduzione da un registro rappresentazionale all'altro, rafforzando i legami tra codice arabico, verbale e semantico.



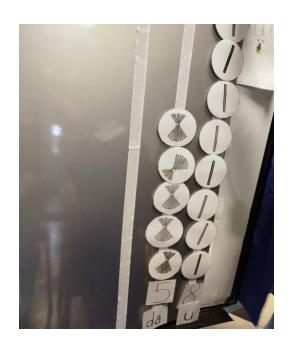


LA SINTASSI NUMERICA

Come funzionano i numeri?

IL VALORE POSIZIONALE DELLE CIFRE





I numeri e la stima

Relazionale e di valore: dominio numerico che riguarda l'adeguata percezione del valore di un numero in relazione ad altri numeri (stima, frazioni etc...); ad esempio «una cosa di un tipo vale cinque di un'altra».

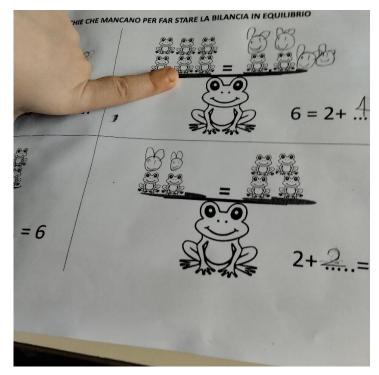


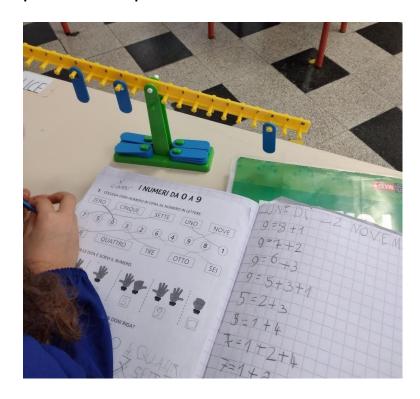


I numeri e l'aspetto relazionale

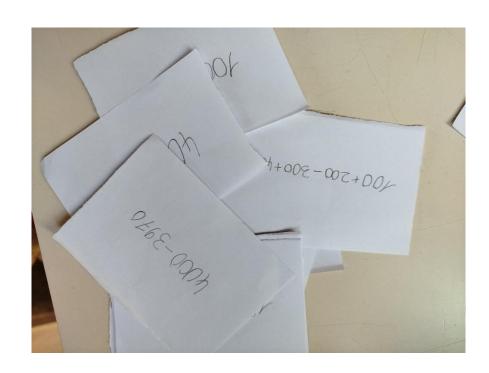
Relazionale e di valore: dominio numerico che riguarda l'adeguata percezione del valore di un numero in relazione ad altri numeri (stima, frazioni etc...); ad esempio «una cosa di un tipo vale cinque di un'altra».

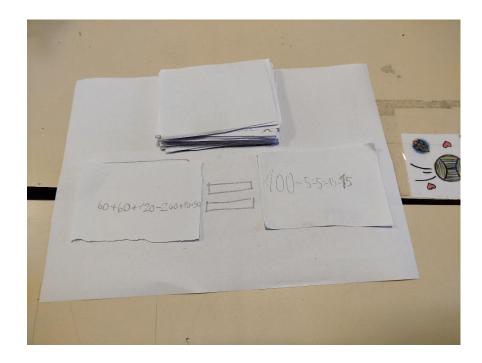






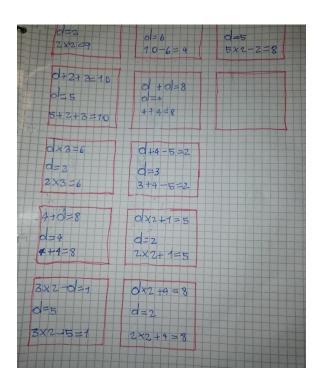
I numeri e l'aspetto relazionale Il valore del segno dell'uguale





I numeri e l'aspetto relazionale

Sviluppo del linguaggio pre-algebrico (presentazione maschere di carnevale)





Costruire il senso del numero

Incontri di formazione del Cidi Sara Campana

Interpretazioni dei numeri razionali

Nell'insieme dei numeri naturali № si possono fare tutte le addizioni e tutte le moltiplicazioni, ma proprio tutte!

Queste due operazioni sono per questo dette interne all'insieme; ma per riuscire a fare tutte le sottrazioni, anche quelle che hanno il sottraendo minore del minuendo, del tipo 2-5, bisogna ampliare \mathbb{N} e passare a \mathbb{Z} , ossia all'insieme dei numeri interi $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Questo insieme considera anche i numeri interi negativi, argomento intuito fin dalla scuola elementare per la presenza di tali numeri nel mondo reale (ascensore, temperatura), ma trattato aritmeticamente nella scuola media.

Resta però il problema di voler effettuare tutte le divisioni senza dover parlare di resto. Per riuscirci, occorre ampliare l'insieme \mathbb{N} e passare a \mathbb{Q} , l'insieme dei numeri razionali; un nuovo mondo per gli allievi, che amplia il precedente. In questo nuovo insieme possiamo finalmente eseguire tutte le divisioni!

I numeri razionali, cioè gli elementi appartenenti all'insieme \mathbb{Q} si possono rappresentare tramite diversi registri: figurale, aritmetico, algebrico ecc. Le forme aritmetiche più note per rappresentare questi numeri sono: le frazioni e i numeri decimali. Le frazioni e i numeri decimali sono quindi due forme di scrittura diverse per rappresentare i numeri razionali; ad esempio 0,5 e 1/2 rappresentano lo stesso numero razionale, ma non solo, vi sono infinite frazioni equivalenti che rappresentano lo stesso numero razionale (2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12 ecc.), così come esistono molte altre rappresentazioni dello stesso concetto espresse in altri registri: figurali, pittorici, a parole ecc.

IMPORTANTE!

La relazione d'ordine "minore" (<) o "minore o uguale" (\leq) e i concetti di precedente e successivo di un numero sono definiti anche nell'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} {... , -2, -1, -0, 1, 2, 3, ...} essendo un insieme discreto come l'insieme dei numeri naturali. Nell'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} (frazioni o numeri decimali), invece, vale sempre la relazione d'ordine "minore" (<) o "minore o uguale" (\leq), ma non i concetti di precedente e successivo, essendo \mathbb{Q} denso e non discreto (si veda l'argomento Interpretazione dei numeri razionali).

Aspetti didattici

Fin da molto piccoli, i bambini si confrontano concretamente con i numeri razionali, quando ad esempio dividono una banana a metà per condividerla con un compagno o una barretta di cioccolata tra tre amici.

Dai primi mesi di scuola è possibile indagare le concezioni spontanee dei bambini sul concetto di metà, o di altre intuitive frazioni, e sulla divisione di un tutto in parti, sia nel continuo sia nel discreto. È su queste concezioni intuitive che è possibile progettare significativi percorsi didattici fin dal primo ciclo.

Nel secondo ciclo tale apprendimento viene ulteriormente sviluppato grazie alla trattazione dei diversi modi di concepire questi numeri, approfondendo in particolare le diverse interpretazioni delle frazioni nei contesti di vita reale e le diverse rappresentazioni dello stesso numero razionale mettendole a confronto l'una con altra; per questa ragione abbiamo chiamato l'argomento "interpretazioni dei numeri razionali".

In particolare, è importante far intuire agli allievi che la forma decimale e la forma frazionaria sono due modi diversi di rappresentare lo stesso numero, scoprendo così che 0,5 e 1/2 non sono numeri distinti, anche se le scritture sono differenti.

Vanno anche valutati con gli allievi i punti di forza e di debolezza di ciascuna rappresentazione e come questi variano in funzione del contesto: a volte risulta più intuitiva la rappresentazione frazionaria, come nel caso della probabilità tra casi favorevoli e casi possibili; altre volte la rappresentazione decimale, come quando si vuole posizionare un numero razionale su una retta numerica; altre ancora quella figurale ecc.

Nel secondo ciclo è importante mostrare agli allievi che l'insieme $\mathbb Q$ è denso, quindi non è possibile trovare il numero successivo di un numero razionale considerato, in quanto, anche se ne viene considerato uno, ce ne sarà sempre un altro più "vicino" rispetto a quello individuato. Ad esempio, il successivo di 0,6 non è certamente 0,7, perché ci sarebbe ad esempio 0,61, ma anche 0,601, o 0,6001, o 0,60001 e così via. Il successivo di un numero razionale non esiste.

FRAZIONI

Il tema delle frazioni è uno degli argomenti numerici più ampi e complessi della scuola elementare, in continuità con la scuola media.

Consideriamo tutti i numeri naturali \mathbb{N} e poi **tutte le scritture del tipo** a/b, **dove sia** a **sia** b **sono numeri naturali**, per esempio: 1/2, 3/5, 7/7, 9/3, 0/5, 4/12, ...

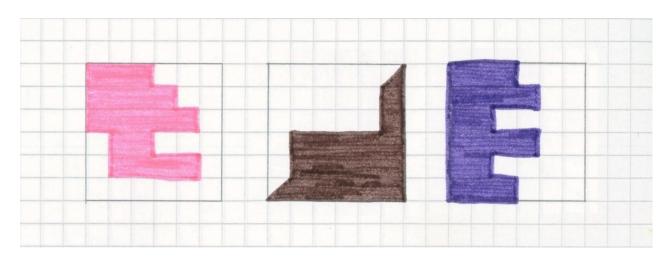
Tutte queste scritture aritmetiche sono **frazioni**, che non sono altro che **un modo di rappresentare i numeri razionali**. Abbiamo infiniti modi di rappresentare un numero razionale tramite le frazioni, grazie alle frazioni equivalenti. Inoltre, la frazione a/b rappresenta la divisione a:b, quindi b non può essere 0, dato che lo 0 non può mai essere un divisore. Infatti, consideriamo un qualsiasi numero naturale a non nullo; se si potesse dividere a per 0, allora esisterebbe un numero razionale c, tale che $c \times 0 = a$.

Ma questo sarebbe possibile solo se *a* fosse 0, e questo genera una contraddizione).

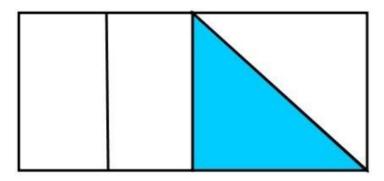
La sesta frazione (4/12) ridotta ai minimi termini è 1/3. Facciamo inoltre notare che la terza frazione nell'elenco precedente (7/7) può essere pensata come una rappresentazione del numero 1, la quarta frazione (9/3) del 3, la quinta frazione (0/5) dello 0, tornando così ai numeri naturali. È allora ovvio che **tutti i numeri naturali si possono pensare come frazioni un po' speciali**.

Consideriamo la frazione a/b: il numero a è detto **numeratore (indica una quantità)**, mentre b è detto **denominatore (indica una qualità, cioè il nome di ciascuna unità frazionaria)**.

I bambini dei primi anni di scuola elementare, dovendo colorare metà della superficie di un quadrato rappresentato su un foglio a quadretti, scelgono spesso di farlo in base al numero di quadretti, piuttosto che alla congruenza delle parti, se questa non è già stata imposta da una definizione vincolante.

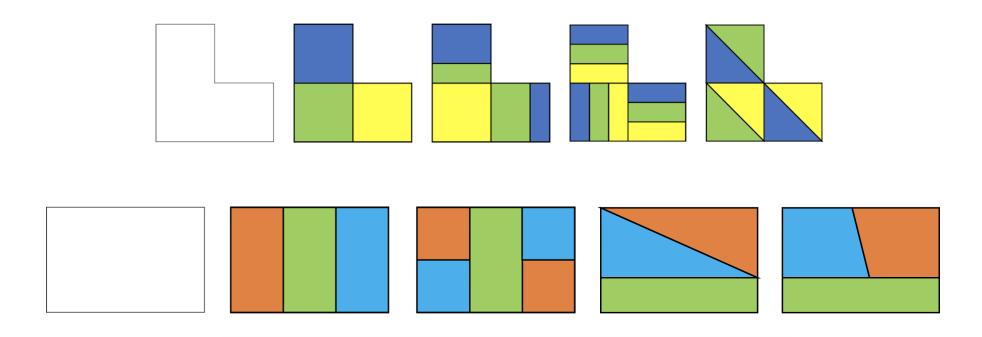


Spesso infatti, si sceglie di introdurre questo argomento partendo dalla seguente definizione: "frazionare vuol dire dividere in parti uguali", che risulta però essere vincolante rispetto ai molteplici significati del concetto e addirittura erronea, dato che la parola "uguale" (intesa come congruente) non consente di accettare che gli oggetti o figure siano divisi in parti di forma diversa, pur rispettando proprietà (come ad esempio l'equinumerosità, l'isoperimetria, l'equiestensione, l'equivolumetria ecc.). Ad esempio, nella figura seguente, la parte colorata rappresenta 1/4 dell'area dell'intero rettangolo, anche se la figura non è stata divisa in parti "uguali".



D'altronde ciò avviene anche nella vita reale: un qualsiasi pezzo di torta che decidiamo di mangiare rappresenta una frazione dell'intero, anche se in precedenza la torta non è stata tagliata in parti uguali! Nella scuola elementare risulta quindi molto importante proporre agli allievi ricche e significative situazioni, in vari contesti discreti e continui, che contemplano la frazione parte-tutto applicata a diverse proprietà, e non esclusivamente alla congruenza delle parti.

Nel continuo, quando si passa dal reale a considerare frazioni di figure astratte, non vanno proposte solamente forme facili da frazionare, ma anche "stravaganti", per non generare la misconcezione che solo nelle figure standard si possono trovare frazioni. La "stravaganza" può essere ricercata anche nelle forme delle parti che si individuano. Per motivare i bambini nella ricerca di partizioni, è possibile creare un concorso di classe per premiare la più originale suddivisione di un intero in parti che rispettano una certa proprietà.



Può essere anche interessante far notare che l'unità continua si può sempre frazionare solo in teoria, perché dividere concretamente un foglio in 120/379, non è una cosa semplice da ottenere nella pratica. Inoltre, quando si parla di frazioni nel discreto, vale la pena non limitarsi a chiedere di trovare suddivisioni possibili, ma può essere anche interessante ragionare su quelle impossibili. Per esempio, se si considera un insieme di 12 persone, si possono trattare non solo 1/2 o i 2/3 (la totalità delle persone è multiplo di 2 e di 3), ma si può considerare anche 1/5 di tale insieme per scoprire che è impossibile da trovare in concreto, essendo una situazione che dal punto di vista semantico non è attuabile.

Inoltre, quando si propone tale interpretazione della frazione (parte-tutto) è importante considerare non soltanto situazioni didattiche che prevedono attività dal tutto alla parte, ma anche dalla parte al tutto. Sarebbe inoltre didatticamente importante far vivere agli allievi un'ampia gamma di esperienze legate ai diversi aspetti di questo ricco oggetto matematico, ma va considerato che le frazioni possono rappresentare un argomento molto ostico se affrontato con un approccio troppo formale e lontano dal vissuto degli allievi.

A volte la frazione a/b rappresenta un quoziente, una divisione non necessariamente effettuata, ma solo indicata a : b; in questo caso l'interpretazione più intuitiva è la seguente: abbiamo a oggetti e dividiamo ciascuno in b parti. Ad esempio, se abbiamo un insieme discreto di 6 oggetti e ne dobbiamo prendere i 3/5, una tecnica può essere quella di dividere ogni elemento in 5 parti e poi prenderne 3 di tali quinti da ciascun oggetto, sempre che questi oggetti si passano dividere!

A volte la frazione è considerata come un operatore moltiplicativo, per esempio "Trovare i 4/5 dell'insieme di 20 persone", in questo caso si opera nel seguente modo: (20 : 5) × 4 persone. Si agisce combinando la divisione e la moltiplicazione, dunque operando sui numeri puri invece che sulle raccolte e sugli oggetti.

Nelle ricette culinarie è possibile sperimentare praticamente la frazione come rapporto, mostrando così un legame tra grandezze, trovandosi a dover calcolare e preparare le quantità di ingredienti in relazione al numero delle persone da considerare.

Nella probabilità si tratta di esprimere, attraverso una frazione, il numero di casi favorevoli all'evento rispetto al numero dei casi possibili, ed è possibile creare situazioni di questo tipo sfruttando monete, dadi, biglie.

Un altro aspetto da contemplare è la frazione come misura: "3/4 di un litro, 1/4 di litro, 1/2 litro"; "La misura delle mie scarpe è 35 e 1/2"; "leri avevo 37 e 1/2 di febbre". Queste affermazioni mettono in evidenza delle vere e proprie misure. Un ulteriore esempio in questo senso legato al lessico comune è l'affermazione: "Sono le quattro e un quarto", dove un quarto, rappresenta una frazione di un'ora, ma nell'uso comune vuol dire 15 minuti, ossia rappresenta un riferimento specifico: "La lancetta lunga sta sul 3 del nostro orologio, si trova in quella posizione".

Anche la percentuale non è altro che una frazione, con peculiarità specifiche ("sconto del 50%", "una pendenza del 10%").

C'è un momento in cui la frazione viene posizionata su una retta orientata e acquista un nuovo significato, ma ciò viene trattato nella scuola media. Nella scuola elementare si può valutare se una frazione è minore di un'altra, cercando di lavorare didatticamente sulle possibili misconcezioni che si possono generare e aiutandosi eventualmente con diverse rappresentazioni. Per esempio, 2/3 può essere ritenuta inizialmente minore di 4/9, perché i bambini, confrontando inizialmente solo i numeratori, desumono che 2 è minore di 4 (e anche che 3 è minore di 9), così come avviene nei numeri naturali. Altri credono che ciò avvenga per l'analogia con i numeri decimali: 2,3 è minore di 4,9 perché 2 è minore di 4, allora sarà così anche tra 2/3 e 4/9. Su tali misconcezioni si può intervenire facendo vivere situazioni concrete dove vengono visualizzate le frazioni o dove è importante ricorrere a frazioni equivalenti; in questo caso, portando le frazioni ad avere lo stesso denominatore, si ottengono le frazioni 6/9 e 4/9 a confronto.

Gradualmente, grazie a tutte queste esperienze che si susseguono nei vari livelli scolastici, la frazione dovrà trasformarsi in numero razionale, assumendo un nuovo complesso significato.

Numeri decimali

Un numero razionale espresso in notazione decimale, ossia secondo il nostro sistema numerico decimale, viene detto numero decimale (in lingua comune: "numero con la virgola"). La notazione decimale è quindi uno dei modi di rappresentare un numero razionale. Se si vuole passare da una rappresentazione espressa in frazione di un numero razionale alla notazione decimale, basta dividere il numeratore per il denominatore, ad esempio 2/5 diventa 2: 5 = 0,4.

2/5 e 0,4 sono quindi due modi diversi di scrivere lo stesso numero razionale.

Nel numero decimale si individua una parte intera, prima della virgola, e una parte decimale, dopo la virgola. Nel passare dalla forma frazionaria a quella decimale si può verificare solo uno dei seguenti tre casi:

si ottiene un numero naturale, se il numeratore è multiplo del denominatore; ad esempio 12/3 è uguale a 4 (i numeri naturali sono casi particolari di razionali);

si ottiene un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola, ad esempio 2/5 dà luogo alla scrittura 0,4;

si ottiene un numero decimale periodico, cioè costituito da infinite cifre dopo la virgola in cui vi è un periodo (cioè alcune di queste cifre si ripetono all'infinito); ad esempio 41/90 dà luogo alla scrittura 0,4555555..., con il 5 che si ripete infinite volte. 0 è la parte intera, 4 si chiama antiperiodo e 5 si chiama periodo. Tale numero si scrive 0,4(5) oppure 0,45.

È anche possibile fare il viceversa, ossia passare da un numero decimale a uno espresso in forma frazionaria. Ad esempio, 6,54 diventa la frazione 654/100, che semplificata ai minimi termini è la frazione 327/50. Il procedimento è più complesso quando il numero decimale di partenza è periodico.

Un numero decimale costituito da infinite cifre non periodiche dopo la virgola è detto irrazionale, argomento che non rientra nella trattazione della scuola elementare. Per un numero irrazionale non esiste un corrispettivo espresso in forma frazionaria.

I numeri decimali con un numero finito di cifre nella parte decimale hanno la caratteristica che gli zeri aggiunti nella parte più a destra, non cambiano la grandezza del numero: 1,30 è come dire 1,3. Questo risulta poco intuitivo per gli allievi che hanno acquisito l'esperienza che aggiungendo uno 0 "in fondo" ad un numero lo si moltiplica per 10.

ASPETTI DIDATTICI

Abbiamo già anticipato come i bambini fin dall'ingresso della scuola elementare possiedono diverse **interessanti convinzioni** sul concetto di metà, espresse in diverse forme di rappresentazione figurali, e come da queste si possa partire per introdurre fin dal primo ciclo i più intuitivi numeri razionali. Va considerato che la rappresentazione in forma decimale di tale concetto (0,5) risulta poco evidente, sicuramente molto meno rispetto a quelle figurali e anche a quella frazionaria (1/2).

Allo stesso tempo i numeri decimali possono far parte dell'**esperienza quotidiana dei bambini** soprattutto in relazione all'ambito *Grandezze e misure*, ad esempio maneggiando le monete potrebbero già conoscere i centesimi o aver sentito utilizzare i numeri decimali per la loro altezza o per il contenuto di una bibita.

Queste esperienze spontanee possono essere valorizzate dal docente già nel primo ciclo, ma è nel secondo ciclo che i numeri decimali vengono presentati e approfonditi cogliendone le caratteristiche matematiche e gli usi anche nel contesto reale. In certi contesti è più diffusa, o risulta più conveniente, la rappresentazione di un numero razionale in notazione decimale, rispetto a quella frazionaria, in altri succede l'inverso. La quantità di acqua contenuta in una bottiglietta è di solito espressa in notazione decimale 0,33 cl; l'ordinamento su una retta numerica di alcuni numeri razionali, dal più piccolo al più grande, risulta più facilmente gestibile nella forma decimale; la probabilità di un evento è espresso in modo più intuitivo in forma frazionaria ecc.

Ordinare i numeri decimali dal più piccolo al più grande risulta abbastanza complesso per gli allievi; per farlo è importante riprendere le considerazioni proposte nel primo ciclo sul valore posizionale delle cifre, allo scopo di far cogliere anche per la parte decimale di tali numeri il fondamentale ruolo del valore delle cifre legato alla loro posizione. In questo modo è possibile far comprendere agli allievi che ad esempio 1,2 è più grande di 1,15, pur essendo 2 più piccolo di 15 nell'insieme dei numeri naturali, focalizzando l'attenzione sul valore e la posizione di ciascuna cifra. Va prima di tutto confrontata la parte intera dei due numeri e, a parità di grandezza numerica, si passa a confrontare la parte decimale. Ciò che va inizialmente confrontato è il valore delle prime cifre dopo la virgola dei due numeri, in questo caso il 2 e l'1 e va valutato se ce n'è uno maggiore dell'altro o no, nel primo caso il numero con la cifra maggiore dopo la virgola sarà il più grande dei due. Se anche queste due cifre dopo la virgola risultano uguali, si passa al confronto delle seconde cifre dopo la virgola e così via.

Per cogliere in profondità il valore che assumono le cifre in base alla posizione nella parte decimale è importante **confrontare numeri decimali che hanno dopo la virgola un numero diverso di cifre**, come 2,7 e 2,619, così da favorire un confronto basato sulla posizione di ciascuna cifra, piuttosto che sulla quantità di cifre dei numeri considerati. Nel confronto della grandezza di numeri come 1,2 e 1,19, non risulta vincente la strategia di scrivere 1,2 nella forma equivalente 1,20, in quanto diventerebbe troppo immediato riconoscere che 20 è maggiore di 19, dato che ciò avviene anche nei numeri naturali, ma è importante far cogliere agli allievi che 1,2 è maggiore di 1,19, anche se 19 è maggiore di 2, per il valore delle prime cifre dopo la virgola. Occorre poi lavorare didatticamente sul fatto che **non esiste il successivo di un numero razionale** e ciò emerge in particolare quando si mostra il numero in notazione decimale. Il successivo di 0,7 non è 0,8 come inizialmente ci si illude, ma neppure 0,71, né 0,701 o 0,7001... per quanto ci si ostini a cercarlo, tale numero non esiste.

Osserviamo inoltre che la scrittura polinomiale di un numero è unica se si considerano come coefficienti delle potenze di 10 le nostre 10 cifre, ma ce ne sono moltissime altre se si esce da questo vincolo (si veda l'argomento. Come per i numeri naturali, anche per i numeri decimali sarà opportuno considerare con gli allievi anche altre scomposizioni possibili del numero, quantificando in modo diverso migliaia, centinaia, decime, unità, decimi, centesimi, millesimi ecc. Questo per evitare che i bambini interiorizzino che, ad esempio, il numero 5,61 contiene solo 6 decimi, mentre in 5,61 ci sono 56 decimi.

Inoltre, risulta importante mostrare ai bambini esempi di numeri decimali le cui cifre decimali vadano oltre ai millesimi (con i decimi di millesimi, centesimi di millesimi e così via), così come si va oltre alle migliaia per la parte intera del numero decimale. Tutto ciò per evitare che si formi nei bambini la misconcezione che i numeri decimali si arrestino alla cifra dei millesimi.

Difficoltà incontrate nel processo di insegnamento/apprendimento nei miei anni di lavoro alla primaria in relazione ai numeri razionali:

- 1. Difficoltà nel confronto di decimali a causa della «trasposizione della lettura» del valore posizionale delle cifre tra interi e numeri decimali (es. : 2345 > 256 quindi 2,345 > 2,56);
- 2. Difficoltà nel collocare le frazioni sulla retta numerica;
- 3. Difficoltà nel fare il confronto tra frazioni con stesso numeratore e diverso denominatore, per il motivo esplicitato al punto 2 (es. 1/5>1/3);
- 4. Difficoltà nel comprendere le frazioni maggiori di un intero (a causa della presentazione della frazioni come parte dell'intero).

LE TAVOLETTE DI CIOCCOLATA

Dividere 3 tavolette di cioccolata tra 4 bambini

LA TOVAGLIETTA DEL PIZZAIOLO NINO (dal libro "Frazioni sul filo")

Ciao bambini, sono il pizzaiolo Nino e avrei bisogno del vostro aiuto. L'anno prossimo aprirò una pizzeria e avrei bisogno di tante belle tovagliette da mettere sui tavoli. Vorrei che le tovagliette fossero composte da diverse parti colorate che possono essere due, tre, quattro o anche di più Ognuna di queste parti deve essere ricavata dividendo la tovaglietta in parti rigorosamente della stessa grandezza. Sono sicuro che vi divertirete a trovare tante combinazioni possibili! Aspetto la vostra risposta, ciao a presto! Nino c/o pizzeria Il Buongustaio

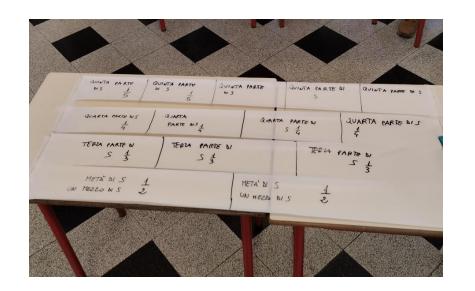
STRISCE, FRAZIONI E NUMERI DECIMALI

STRATEGIE: LAVORO A COPPIE/GRUPPO. DARE DELLE CONSEGNE CHE ATTIVINO STRATEGIE, CHIEDERE COME SI È RAGIONATO, CONFRONTO COLLETTIVO, CONSOLIDAMENTO.

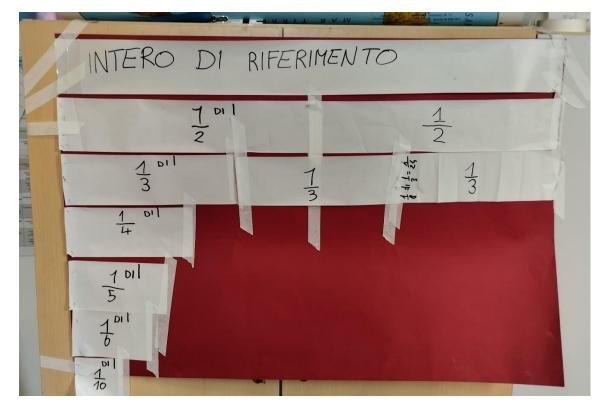
Dividere in parti uguali delle strisce, anche di lunghezze diverse.

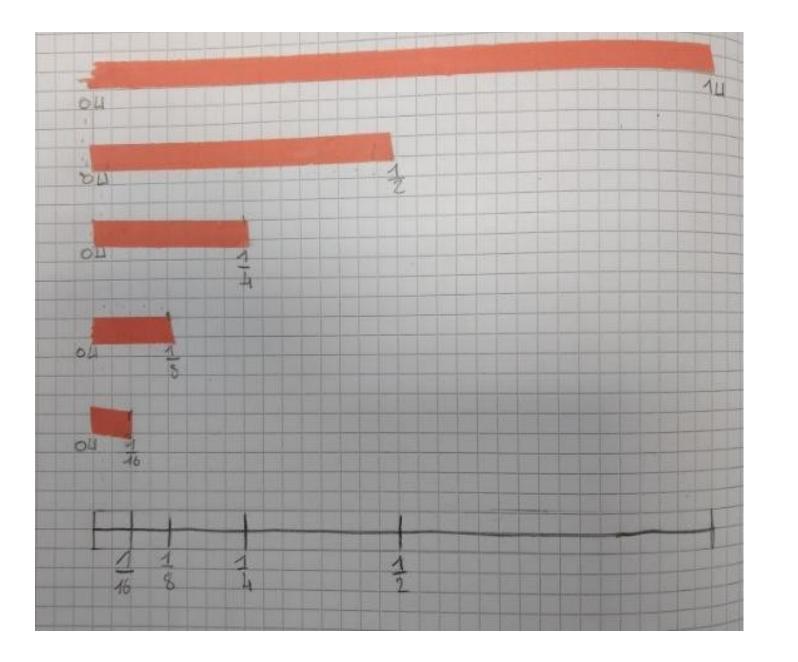
Dividere in parti uguali strisce della stessa lunghezza:

- Importanza dell'unità frazionaria rispetto all'intero di riferimento (UTILIZZO DEL DENOMINATORE);
- Confronto tra unità frazionarie;
- Comporre un intero con diverse unità frazionarie;
- Frazioni maggiori, uguali e minori di un intero;
- Equivalenze tra frazioni (VIDEO);
- Trova una frazione che esprima il valore di due frazioni messe insieme;
- Frazioni decimali e numeri decimali;
- Composizione di numeri decimali;
- Linea dei numeri decimali.



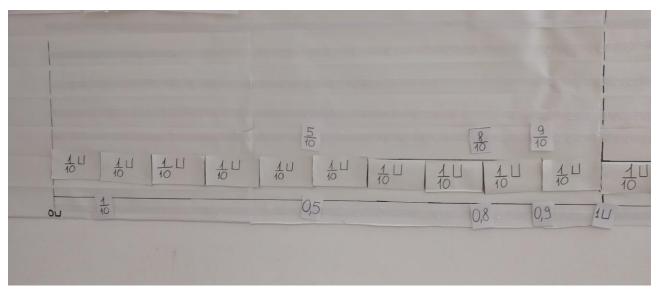


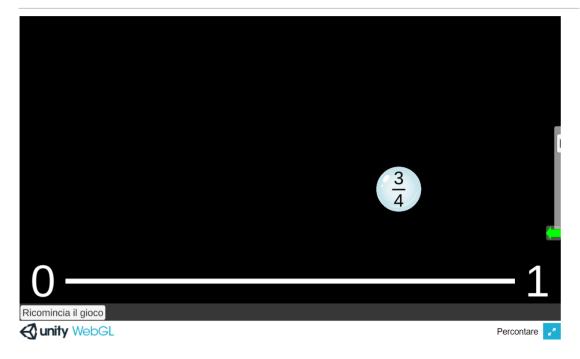


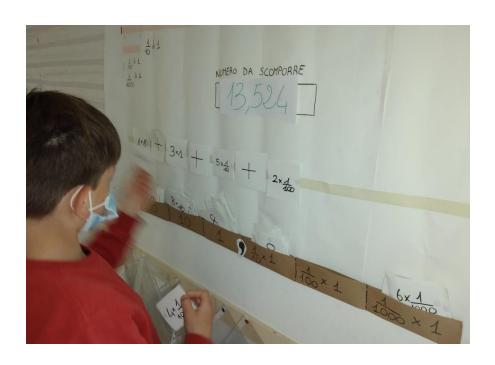


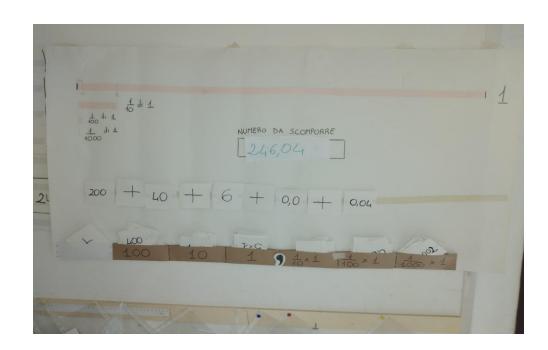




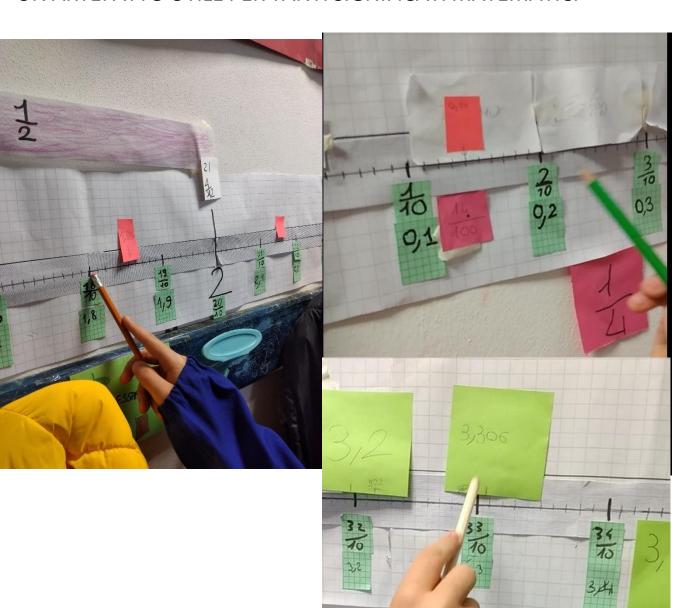








UN ARTEFATTO UTILE PER TANTI SIGNIFICATI MATEMATICI



Oltre al muro delle frazioni ho realizzato una lunga striscia nel corridoio della scuola utilizzando carta millimetrata, con i numeri da 1 a 5 (distanti tra loro un metro). I bambini e le bambine, ragionando, hanno diviso la striscia in interi, individuando i decimi e i centesimi (hanno attaccato le frazioni decimali con i decimi) La striscia è stata utilizzata per lavorare con frazioni e numeri decimali consentendo di:

- Collocare numeri decimali sulla linea dei numeri confrontando la posizione di numeri decimali e quindi il loro valore (quindi ad esempio rendersi conto che 1,3 è maggiore di 1,194);
- Collocare frazioni non decimali sulla linea dei numeri anche oltre il numero uno e scoprire l'equivalenza di alcune frazioni (es 25/100= 1/4; 20/10= 8/4 etc...);
- Favorire la considerazione della frazione come numero razionale.